Mathematik 1
Dozent: Martin Unold

Übungsblatt 3

Abgabe: 19.04.2018

Aufgabe 1 (1 Punkt)

Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

kann zu einer Funktion $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig fortgesetzt werden. Welchen Funktionswert hat die Funktion an der Stelle -2, also was ist $\hat{f}(-2)$?

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Grenzwerte ($a \in \mathbb{R}$ ist eine feste unbekannte Zahl)

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^2 - 4}{h}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + a}{x^4 + a}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{x - 1} - \frac{3x^2}{x + 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x \cdot \sqrt{x} - 1}{x + \sqrt{x} - 2}$$

Aufgabe 3 (1 Punkt)

Bestimmen Sie die ersten 5 Werte der Folge

$$a_0 = 6$$

$$a_n = \begin{cases} 3 \cdot a_{n-1} - 1 & \text{wenn } a_{n-1} \text{ ungerade ist} \\ \frac{1}{2} \cdot a_{n-1} & \text{wenn } a_{n-1} \text{ gerade ist} \end{cases}$$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Berechnen Sie folgende Summen und Produkte:

$$\sum_{n\in\{2,3,5,7\}} n^2 \qquad \sum_{n=1}^{3}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)$$

$$\prod_{n\in\{2,3,5,7\}} (n-1) \qquad \prod_{n=2}^{4}\left(\sum_{k=2}^{n+1}\frac{k-1}{3}\right)$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Die folgenden Funktionen haben jeweils eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$.

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \frac{1}{3} - x$$
$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

Bestimmen Sie die Nullstelle im angegebenen Intervall jeweils mit den folgenden Verfahren. Führen Sie jeweils 5 Schritte aus. Beschreiben und erklären Sie, welche Vor- und Nachteile Ihnen auffallen.

- Bisektionsverfahren $[a_0, b_0] = [0, 1]$

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$
$$a_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{wenn } f(a_n) \text{ und } f(c_n) \text{ gleiches Vorzeichen haben} \\ a_n & \text{wenn sie unterschiedliche Vorzeichen haben} \end{cases}$$
$$b_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{wenn } f(b_n) \text{ und } f(c_n) \text{ gleiches Vorzeichen haben} \\ b_n & \text{wenn sie unterschiedliche Vorzeichen haben} \end{cases}$$

- Sekantenverfahren $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$