Mathematik 1
Dozent: Martin Unold

Übungsblatt 12

Keine Abgabe

Dieses zusätzliche Übungsblatt dient als Hilfestellung zur Vorbereitung auf die Klausur. Es besteht kein Anspruch auf vollständige Abdeckung des Inhalts der Vorlesung.

Mengen

Bestimmen Sie die Elemente der Mengen

- $(\{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6\}) \setminus \{2, 3, 7\}$
- $(\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{2, 4, 6\}) \cap \{2, 3, 7\}$

Aussagen

Welche dieser Aussagen ist wahr, welche ist falsch?

- $1 \in \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 6\}$
- $\{1, 4, 6\} \subset \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6\}$
- $(2 + 3) \cdot 2 - 1 = 3^2$
- $(\log_2(8))^2 = 8$
- $\sqrt[3]{64} = (3 + 5)/2$

Summen

Berechnen Sie die Summen

- $\sum_{i=3}^{5} i^2$
- $\sum_{j=1}^{100} (-1)^j \cdot j$

Gleichungen

Welche Werte für $x, y \in \mathbb{R}$ lösen die Gleichungen

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{(x+y)^2 + 1} = 1$$
$$2 = \frac{2x^2 + 2}{2y^2 + 2}$$
$$x - y \leq 0$$

Geometrie

In welchem Punkt schneidet die Gerade, die durch die Punkte

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

verläuft, die Gerade, die durch die Punkte

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

verläuft?

Folgen

Bestimmen Sie die Werte der ersten 8 Folgenglieder (bis einschließlich a_8) der Folge

- $a_1 = a_2 = 1$
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 3$

Grenzwerte

Bestimmen Sie die Grenzwerte

- $\lim_{x \to 0} (e^x - 1) \cdot x^{-1}$
- $\lim_{x \to \infty} \ln(x) - e^x$

Funktionen

Gegeben ist die folgende Funktion.

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Wertetabelle

Berechnen Sie die Funktionswerte $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ und $f(3)$.

Nullstellen

Bestimmen Sie alle Nullstellen

$$N_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$$

Symmetrie

Ermitteln Sie, ob die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse

$$f(x) = f(-x)$$

oder punktsymmetrisch zum Ursprung

$$f(x) = -f(-x)$$

ist.

Ableitungen

Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen f' und f''.

Extremwerte

Ermitteln Sie die lokalen Extremwerte der Funktion und bestimmen Sie, ob es sich jeweils um lokale Minima oder Maxima handelt.

$$f'(x) = 0$$

- $f''(x) < 0 \Rightarrow$ Lokales Maximum
- $f''(x) > 0 \Rightarrow$ Lokales Minimum

Taylorreihen

Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$$

soll durch eine Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt $a = 0$ ersetzt werden. Geben Sie die Taylor-Reihe

$$T(x) = T_\infty(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

explizit an. Diese Taylor-Reihe ist eine alternative Möglichkeit, um den Wert der eulerschen Zahl zu berechnen. Denn es gilt:

$$T(1) = e^1 = e = \exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Nutzen Sie diese Erkenntnis, um für die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=i}^{n} j \right) = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n) + (2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n) + \ldots + (n)$$

eine einfache Rechenvorschrift (ohne Summe) anzugeben.

Zweidimensionale Funktionen

Bestimmen Sie jeweils das Minimum der folgenden Funktionen.

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - (2+x)y$$
$$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2(x,y) = y^2 - y \cdot e^{-x^2}$$