

Fachbereich Mathematik und Informatik

Johannes-Gutenberg-Universität Mainz

Effiziente Abstandsberechnung für Dreiecksmengen mittels diskreter Voronoi-Diagramme

Bachelorarbeit im Fach Mathematik
zur Erlangung des akademischen Grades eines Bachelor of Science (B. Sc.)

Autor Martin Unold
E-Mail-Adresse munold@students.uni-mainz.de

Betreuer Prof. Dr. E. Schömer
Institut für Informatik
Staudingerweg 9
55128 Mainz
Raum 05-517

Erstkorrektur Prof. Dr. E. Schömer
Zweitkorrektur Prof. Dr. N. Wolpert

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Inhalt	1
2	Wichtige Definitionen	3
2.1	Algorithmus	3
2.2	Definition (Dreieck im Raum)	3
2.3	Definition (Metrische Abbildungen)	3
2.4	Definition (Voronoi-Region)	5
2.5	Wichtige Konventionen in dieser Arbeit	6
2.6	Definition (Nahe-Mengen-Liste)	6
2.7	Definition (Projektion)	7
2.8	Beispiele	8
3	Algorithmus - 1. Teil: diskretes Voronoi-Diagramm erstellen	9
3.1	Lemma	9
3.2	Satz (Punkt-Dreieck-Distanz)	10
3.3	Lemma	12
3.4	Satz (Würfel-Dreieck-Distanz)	13
3.5	Beispiel	16
3.6	Beschreibung	16
3.7	Pseudocode	17
3.8	Laufzeitanalyse	17
4	Algorithmus - Teil 2: Abstandsberechnung für zwei Polyeder	19
4.1	Satz (Dreieckspaar-Wahl)	19
4.2	Satz (Dreieck-Dreieck-Distanz)	21
4.3	Beschreibung	21
4.4	Pseudocode	22
4.5	Laufzeitanalyse	22
5	Resultate	23
5.1	Algorithmus in der Praxis	23
5.2	Diskussion	23
5.3	Erweiterungen und Verbesserungen	24

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Den Abstand zweier Objekte im Raum zu ermitteln, ist ein wichtiges Problem in vielen Bereichen, besonders bei grafischen Animationen am Computer. Will man beispielsweise bewegte Objekte auf Kollision testen, ist es gut, wenn man ein Verfahren kennt, das zeitnah den Abstand berechnet.

1.2 Inhalt

Es wird ein Algorithmus zur Berechnung des Abstandes zweier (nicht notwendig konvexer) Polyeder im Raum beschrieben. Die beiden Polyeder werden dabei als Menge von Dreiecken aufgefasst. Eine solche Darstellung kann für jedes beliebige Polyeder gefunden werden.

Der Algorithmus ist besonders gut geeignet für bewegliche Polyeder. Es wird zuerst eine zeitintensive Berechnung durchgeführt, die jedoch nur einmal notwendig ist. Danach wird eine zweite Berechnung durchgeführt, die den Abstand der Polyeder bestimmt. Ändern die Polyeder ihre Lage im Raum durch eine starre Transformation, so kann der Abstand ohne die erste Berechnung bestimmt werden.

Der naive Ansatz zur Berechnung des Abstandes zweier Dreiecksmengen geschieht durch eine Abstandsberechnung aller Dreieckspaare miteinander und Minimumbildung. Ziel des Verfahrens ist es von sehr viel weniger Dreieckspaaren den Abstand zu ermitteln. Deshalb muss im Laufe des Algorithmus eine hohe Zahl von Dreieckspaaren von dieser Abstandsermittlung ausgeschlossen werden.

Im ersten Teil werden diskrete Voronoi-Regionen um ein Polyeder gelegt. Diese sollen (kontinuierliche) Voronoi-Regionen approximieren. Der Raum um das Polyeder wird dazu in kleine Würfel eingeteilt. Zu jedem dieser Würfel wird eine Liste von Dreiecken gespeichert, die potenziell den geringsten Abstand zu dem betrachteten Würfel haben könnten. Anders formuliert werden dadurch alle Dreiecke ausgeschlossen, die nicht am nächsten zu irgendeinem Punkt innerhalb des Würfels liegen können. Zu den Dreiecken wird auch der maximal mögliche und minimal mögliche Abstand gespeichert.

Im zweiten Teil werden dann mit Hilfe der diskreten Voronoi-Regionen die Dreieckspaare ermittelt, die mit dieser Abschätzung noch am nächsten zu einander liegen könnten. Diese werden nach minimal möglichem Abstand geordnet und nun wird die Abstandsberechnung für Dreieckspaare ausgeführt. Dies kann abgebrochen werden, sobald der minimal mögliche Abstand des nachfolgenden Dreieckspaars bereits unterschritten wurde.

Der Algorithmus wurde in der Programmiersprache C++ implementiert. Im letzten Kapitel werden die Ergebnisse präsentiert, Probleme diskutiert und mögliche Erweiterungen und Verbesserungen angegeben.

Hinweis

Weitere Verfahren zur effizienten Abstandsermittlung von Dreiecksmengen werden auch in der Arbeit von R. Erbes, die voraussichtlich im Frühjahr 2009 an der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz veröffentlicht wird, behandelt.

Kapitel 2

Wichtige Definitionen

Ein Grundwissen im Bereich der analytischen Geometrie wird vorausgesetzt. Dem Leser sollten also Darstellungsarten von Geraden und Ebenen sowie Verfahren zur Bestimmung von Schnittpunkten bekannt sein. Hilfreich bei der Lektüre sind außerdem Programmierkenntnisse und Erfahrung mit Algorithmen.

2.1 Algorithmus

Gegeben sind zwei Polyeder \mathcal{A} und \mathcal{B} dargestellt als Dreiecksmengen, also $\mathcal{A} = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}$ und $\mathcal{B} = B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_{m-1}$ mit Dreiecken A_i und B_j , $i = 0, \dots, n-1$, $j = 0, \dots, m-1$. Gesucht ist der (minimale) Abstand zwischen den beiden Polyedern, also $\min_{a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}} \|a - b\|$.

2.2 Definition (Dreieck im Raum)

Ein Dreieck ist eine Menge $D \subset \mathbb{R}^3$ mit drei Eckpunkten a, b und $c \in \mathbb{R}^3$, sodass gilt: $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = a + \lambda(b - a) + \mu(c - a), \lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu \leq 1\}$. Wird nichts weiter dazu gesagt, so ist mit einem Dreieck eine solche Teilmenge D des \mathbb{R}^3 gemeint und mit Eckpunkten drei Punkte, sodass D obige Gleichung erfüllt.

Bemerkung

Ein Polyeder ist ein dreidimensionales Objekt, das nur von geraden Flächen begrenzt wird. Ein allgemeines Polyeder besteht also aus endlich vielen n -Ecken, wobei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Man kann ein solches n -Eck in $n-2$ Dreiecke zerschneiden, indem man von einem beliebigen Punkt des n -Ecks einen Schnitt zu jedem anderen Punkt des n -Ecks (bis auf die beiden benachbarten Punkte und sich selbst) zieht. So kann man ohne Einschränkung davon ausgehen, dass ein Polyeder in Form einer Dreiecksmenge gegeben ist. Die Darstellung eines Polyeders als $\mathcal{A} = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}$ ist äquivalent zur Darstellung $\Delta = \{A_0, A_1, \dots, A_{m-1}\}$ für Dreiecke A_i , $i = 0, \dots, m-1$. In dieser Arbeit wird letztere Notation verwendet.

2.3 Definition (Metrische Abbildungen)

Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Metrik*, wenn gilt:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ für alle $x, y \in X$.
2. Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.

3. Dreiecks-Ungleichung: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$.

(X, d) heißt dann *metrischer Raum*.

Wir definieren weitere Abbildungen für die Potenzmenge von X :

$$\text{dist} : X \times \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \text{dist}(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

für einen Punkt $x \in X$ und eine nicht-leere Menge $A \subseteq X$ ist der Abstand einer Menge zu einem Punkt.

$$\text{mindist} : \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \text{mindist}(A, B) = \inf_{a \in A} \text{dist}(a, B)$$

für nicht-leere Mengen $A, B \subseteq X$ ist der minimale Abstand zweier Mengen zueinander.

$$\text{maxdist} : \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \text{maxdist}(A, B) = \sup_{a \in A} \text{dist}(a, B)$$

für nicht-leere Mengen $A, B \subseteq X$ ist der maximale Abstand aus Sicht von A und der minimale Abstand aus Sicht von B .

Für zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $\langle a, b \rangle := a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ das euklidische Skalarprodukt und $\|a\| := \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ die euklidische Norm.

Das Vorzeichen einer reellen Zahl wird auch häufig benötigt. Daher bezeichnet $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ mit

$$\text{sign}(\xi) = \begin{cases} -1, & \xi < 0 \\ 0, & \xi = 0 \\ 1, & \xi > 0 \end{cases}$$

für $\xi \in \mathbb{R}$ die Signums-Funktion.

Diese und weitere Informationen zu metrischen Abbildungen sind in [2] zu finden.

Bemerkung

Man beachte, dass der Hausdorff-Abstand für kompakte und nicht-leere Mengen $A, B \subset X$ definiert ist als

$$\delta(A, B) := \max\left(\max_{a \in A} \text{dist}(a, B), \max_{b \in B} \text{dist}(b, A)\right)$$

und damit nicht gleichbedeutend mit maxdist ist. Bei maxdist handelt es sich um einen gerichteten Hausdorff-Abstand. Es gilt:

$$\delta(A, B) = \max(\text{maxdist}(A, B), \text{maxdist}(B, A))$$

Die folgende Abbildung zeigt, was man sich unter $\text{maxdist}(V, A)$ und $\text{mindist}(V, A)$ vorstellen kann. V ist ein Würfel und A ist ein Dreieck.

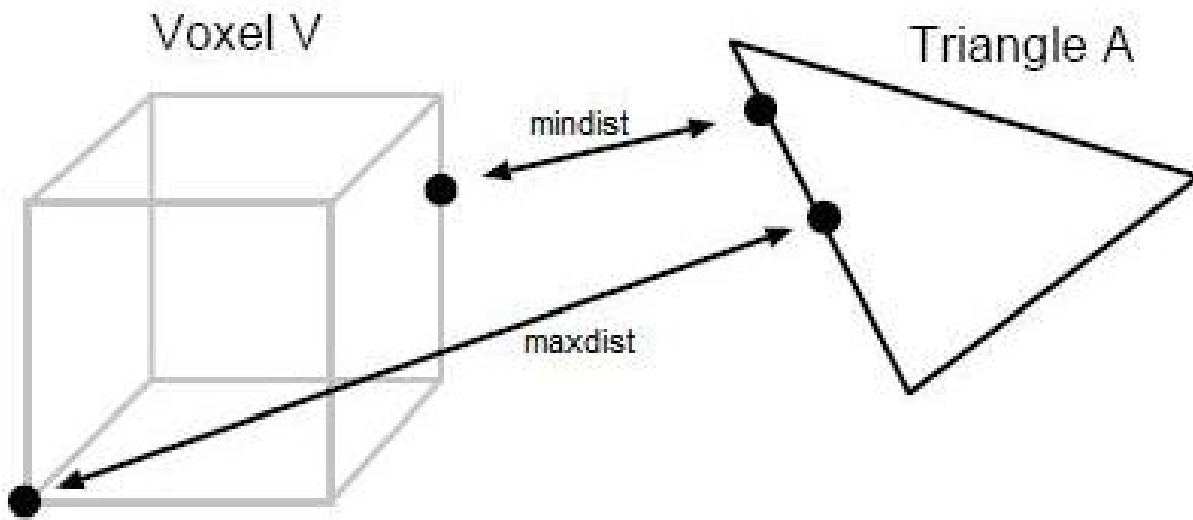


Abbildung 1: Metrische Abbildungen

2.4 Definition (Voronoi-Region)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A_0, A_1, \dots, A_{n-1} \subset X$ seien $n \in \mathbb{N}$ Teilmengen. Ein *Voronoi-Diagramm* ist eine Zerlegung des metrischen Raumes X in n Bereiche $V_0, V_1, \dots, V_{n-1} \subset X$ mit $V_i := \{x \in X : \text{dist}(x, A_i) \leq \text{dist}(x, A_j) \forall j \neq i\}$, $i = 0, \dots, n-1$. Diese Bereiche nennt man *Voronoi-Regionen*.

Bemerkung

1. Offensichtlich sind Voronoi-Regionen abgeschlossen, da auch Gleichheit zulässig ist. Jeder Punkt des Raumes ist mindestens einer Voronoi-Region zugeordnet. Voronoi-Regionen enthalten die zugehörigen Mengen, da der Abstand null ist.
2. Voronoi-Diagramme kann man grafisch veranschaulichen, indem man die Voronoi-Regionen unterschiedlich färbt. Ein gefärbtes Gebiet steht für den Bereich, der einer bestimmten Menge am nächsten ist.
3. Damit der Umgang mit Voronoi-Diagrammen numerisch möglich wird, abstrahiert man zu diskreten Voronoi-Diagrammen. Der Raum X wird in ω^3 kleine Würfel eingeteilt und die Voronoi-Regionen werden darauf beschränkt.
4. Abbildung 1 zeigt, was man sich unter einem Voronoi-Diagramm vorstellen kann. Im linken Bild gibt es sieben Punkte A, B, C, D, E, F und G in der Ebene und die zugehörigen Voronoi-Regionen sind unterschiedlich gefärbt. Hier sind es Punkte in der Ebene, aber für Dreiecke im Raum kann man sich das analog veranschaulichen. Im rechten Bild sind nun kleine Quadrate eingefügt worden und zu jedem Quadrat werden die Voronoi-Regionen gemerkt, die sich innerhalb des Quadrates befinden. Im dreidimensionalen Fall mit Dreiecken entsprechen diese Quadrate dann den Voronoi-Würfeln. Die Nahe-Mengen-Liste soll dann die Voronoi-Regionen enthalten, die sich im zugehörigen Würfel befinden. Leider enthält eine Nahe-Mengen-Liste noch mehr. Dies wird in Lemma 3.1 gezeigt.

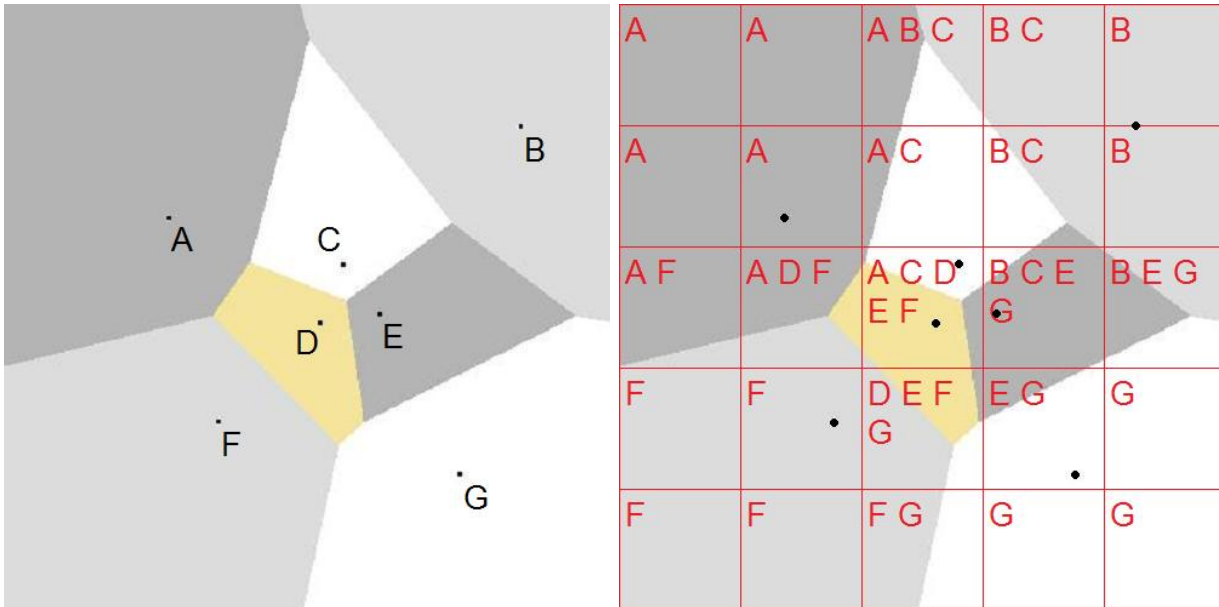


Abbildung 2: Diskretisierung eines Voronoi-Diagramms

2.5 Wichtige Konventionen in dieser Arbeit

Bei der behandelten Problemstellung ist eine allgemeine Betrachtung metrischer Räume nicht notwendig. Es gelte von nun an:

- $X := [-1, 1]^3 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$
- $\forall x, y \in X : d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$
- $\forall x, y \in X : d^2(x, y) := (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2$
- $\omega \in \mathbb{N}$ sei eine beliebige, aber nun feste, natürliche Zahl.

Da $X \neq \mathbb{R}^3$, könnte es vorkommen, dass sich ein allgemeines Polyeder im Raum teilweise oder ganz außerhalb von X befindet, sodass eine Skalierung vorzunehmen ist.

- Es wird also davon ausgegangen, dass sich die betrachteten Polyeder ganz in X befinden.

d ist der euklidische Abstand im Raum. Es handelt sich dabei um eine Metrik. [6] Leider ist dabei ein Wurzelziehen nötig, was sehr viel Rechenleistung erfordert. Deshalb betrachtet man auch den quadratischen Abstand d^2 . Allerdings ist d^2 keine Metrik, denn die Dreiecksungleichung ist nicht erfüllt. Man betrachte zum Beispiel $x = 2, y = 4, z = 6$. Dann ist $d^2(2, 6) = 16$, aber $d^2(2, 4) = d^2(4, 6) = 4$ und damit ist $d^2(2, 6) = 16 > 8 = d^2(2, 4) + d^2(4, 6)$. d^2 erfüllt jedoch eine andere brauchbare Eigenschaft, nämlich für $a, b, c, d \in X$ gilt: $d(a, b) > d(c, d) \Leftrightarrow d^2(a, b) > d^2(c, d)$. Dies folgt direkt aus der strengen Monotonie der Quadratfunktion auf $[0, \infty)$. Im letzten Kapitel wird auf diese Problematiken noch näher eingegangen.

- Da in dieser Arbeit keine Matrizen verwendet werden, wird nicht explizit zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren unterschieden.

2.6 Definition (Nahe-Mengen-Liste)

Für $x, y, z \in \{0, 1, \dots, \omega - 1\}$ setze je einen *Voronoi-Würfel* auf

$$W_{x,y,z} := \left[-1 + \frac{2x}{\omega}, -1 + \frac{2(x+1)}{\omega} \right] \times \left[-1 + \frac{2y}{\omega}, -1 + \frac{2(y+1)}{\omega} \right] \times \left[-1 + \frac{2z}{\omega}, -1 + \frac{2(z+1)}{\omega} \right]$$

Für Mengen $A_0, A_1, \dots, A_{n-1} \subset X$ und zugehörige Voronoi-Regionen $V_0, V_1, \dots, V_{n-1} \subset X$ setze die zum Voronoi-Würfel die *Nahe-Mengen-Liste* (engl. „closest feature list“):

$$CFL_{x,y,z} := \{(A_i, \text{mindist}(W_{x,y,z}, A_i), \text{maxdist}(W_{x,y,z}, A_i)) : i \in \{0, 1, \dots, n-1\} : \\ \forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\} : \text{mindist}(W_{x,y,z}, A_i) \leq \text{maxdist}(W_{x,y,z}, A_j)\}$$

Eigentlich möchte man die Mengen in der Nahe-Mengen-Liste haben, deren Voronoi-Region innerhalb des Würfels liegt. Lemma 3.1 zeigt in welchem Zusammenhang die nahen Mengen zu den Voronoi-Regionen stehen.

Wenn von nun an von Voronoi-Würfeln oder Nahe-Menge-Listen die Rede ist, so sind mit Indizes x, y, z solche Zahlen von 0 bis $\omega - 1$ gemeint.

Definition

Sei $W_{x,y,z}$ ein Voronoi-Würfel.

$$E_{x,y,z} := \left\{ \begin{aligned} &\left(\begin{array}{c} -1 + \frac{2x}{\omega} \\ -1 + \frac{2y}{\omega} \\ -1 + \frac{2z}{\omega} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 + \frac{2x}{\omega} \\ -1 + \frac{2y}{\omega} \\ -1 + \frac{2(z+1)}{\omega} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 + \frac{2x}{\omega} \\ -1 + \frac{2(y+1)}{\omega} \\ -1 + \frac{2z}{\omega} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 + \frac{2x}{\omega} \\ -1 + \frac{2(y+1)}{\omega} \\ -1 + \frac{2(z+1)}{\omega} \end{array} \right), \\ &\left(\begin{array}{c} -1 + \frac{2(x+1)}{\omega} \\ -1 + \frac{2y}{\omega} \\ -1 + \frac{2z}{\omega} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 + \frac{2(x+1)}{\omega} \\ -1 + \frac{2y}{\omega} \\ -1 + \frac{2(z+1)}{\omega} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 + \frac{2(x+1)}{\omega} \\ -1 + \frac{2(y+1)}{\omega} \\ -1 + \frac{2z}{\omega} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -1 + \frac{2(x+1)}{\omega} \\ -1 + \frac{2(y+1)}{\omega} \\ -1 + \frac{2(z+1)}{\omega} \end{array} \right) \end{aligned} \right\}$$

bezeichnet die Eckpunkte des Würfels.

Bemerkung

Später soll es auch möglich sein die Objekte starr zu transformieren. Deshalb ist eigentlich eine etwas allgemeinere (nicht unbedingt achsenorientierte) Betrachtung von Voronoi-Würfeln notwendig. Diese erweiterte Betrachtung ist allerdings nicht besonders aufwändig zu realisieren. Im zweiten Teil des Algorithmus wird darauf noch eingegangen.

Definition

Für jede Koordinate im \mathbb{R}^3 definiere eine *Wand* in diese Richtung, d.h. einen Abschnitt des Raumes, der durch zwei Ebenen, die senkrecht zu dieser Koordinatenrichtung stehen, begrenzt ist und die Breite $\frac{2}{\omega}$ hat.

$${}_1\Omega_x := \left[-1 + \frac{2x}{\omega}, -1 + \frac{2(x+1)}{\omega} \right] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$${}_2\Omega_y := \mathbb{R} \times \left[-1 + \frac{2y}{\omega}, -1 + \frac{2(y+1)}{\omega} \right] \times \mathbb{R}$$

$${}_3\Omega_z := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \left[-1 + \frac{2z}{\omega}, -1 + \frac{2(z+1)}{\omega} \right]$$

2.7 Definition (Projektion)

X_1, \dots, X_n seien Mengen und $A \subseteq X_1 \times \dots \times X_n$ eine Teilmenge des Kreuzprodukts. Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ein Multiindex mit $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{1, \dots, n\}$ und $\alpha_i < \alpha_j$ für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i < j$.

Die *Projektion* von A auf die α -Komponenten ist

$$\Pi_\alpha(A) := \{(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_k}) : (a_1, \dots, a_n) \in A, a_1 \in X_1, \dots, a_n \in X_n\}.$$

Dies gilt analog für Spaltenvektoren.

2.8 Beispiele

$${}_2\Omega_3 = \mathbb{R} \times \left[-1 + \frac{6}{\omega}, -1 + \frac{8}{\omega} \right] \times \mathbb{R}$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow \Pi_{(2,3)}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$$

Kapitel 3

Algorithmus - 1. Teil: diskretes Voronoi-Diagramm erstellen

In diesem Kapitel wird ein Verfahren beschrieben, wie man die Nahe-Mengen-Liste einer Dreiecksmenge zu jedem Voronoi-Würfel des Raumes erstellen kann.

3.1 Lemma

$$\{(A_i, \text{mindist}(W_{x,y,z}, A_i), \text{maxdist}(W_{x,y,z}, A_i)) : i \in \{0, 1, \dots, n-1\} : V_i \cap W_{x,y,z} \neq \emptyset\} \subseteq CFL_{x,y,z}$$

Beweis:

Sei $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ beliebig. Sei $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ mit $V_i \cap W_{x,y,z} \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $v \in V_i \cap W_{x,y,z}$. Da $v \in V_i$, ist $\text{dist}(v, A_i) \leq \text{dist}(v, A_j)$ und, da $v \in W_{x,y,z}$, ist damit $\text{mindist}(W_{x,y,z}, A_i) \leq \text{dist}(v, A_i) \leq \text{dist}(v, A_j) \leq \text{maxdist}(W_{x,y,z}, A_j)$. Also ist $i \in CFL_{x,y,z}$. ■

Bemerkung

Das linke Bild der folgenden Abbildung zeigt analog zu Abbildung 2 ein diskretes Voronoi-Diagramm. Hier ist ein Ausschnitt eines Polyeders zu sehen mit Dreiecken a, b und c. Ra, Rb und Rc bezeichnen die Voronoi-Regionen dieser Dreiecke.

Die umgekehrte Inklusion von Lemma 3.1 gilt im Allgemeinen nicht. Das rechte Bild zeigt, warum mehr Dreiecke in die Nahe-Mengen-Liste eines Würfels aufgenommen werden können als sich Voronoi-Regionen darin überlagern. Der Würfel in der Mitte beinhaltet nicht die Voronoi-Region von Dreieck A. Aber A ist $\frac{2}{\omega}$ vom mittleren Würfel entfernt. Die Dreiecke B, C und D haben einen Maximalabstand zum Würfel von $\frac{3}{\omega}$ und deshalb wird A dennoch in die Nahe-Mengen-Liste aufgenommen.

Diese Tatsache erhöht zwar die Mächtigkeit der Nahe-Mengen-Liste und damit die Laufzeit des zweiten Teils des Algorithmus, aber ändert nichts an dessen Korrektheit. Wichtig für die Korrektheit ist die Tatsache, dass alle Dreiecke, deren Voronoi-Region innerhalb des Würfels liegen, auch in der Nahe-Mengen-Liste enthalten sind. Dies wurde eben bewiesen.

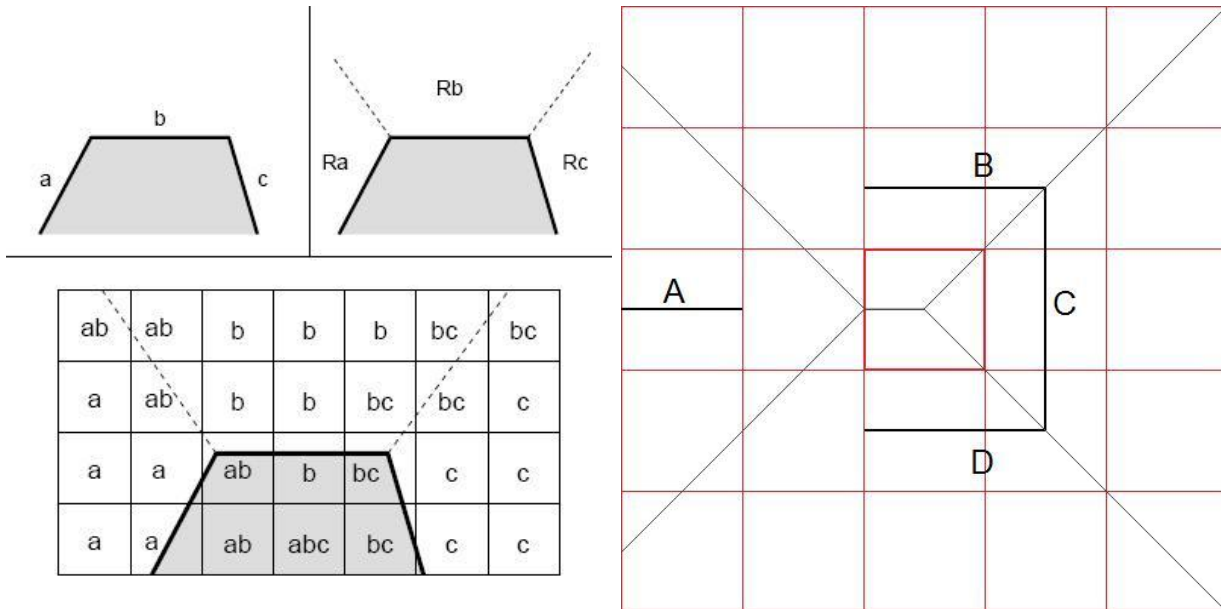


Abbildung 3: Diskrete Voronoi-Diagramme von Dreiecksmengen

Bemerkung

Für jeden Voronoi-Würfel $W_{x,y,z}$ kann man also die darin befindlichen Voronoi-Regionen berechnen, indem man für alle Mengen A die Distanz $\max\text{dist}(W_{x,y,z}, A)$ bestimmt.

Davon wird das Minimum gebildet und alle Mengen A , bei denen $\min\text{dist}(W_{x,y,z}, A)$ kleiner ist, werden in die Nahe-Mengen-Liste aufgenommen.

Es wurde eben gezeigt, dass die Nahe-Mengen-Liste sogar noch mehr enthalten kann als man eigentlich braucht.

3.2 Satz (Punkt-Dreieck-Distanz)

1. Sei $A \subset X$ ein Dreieck mit Eckpunkten a, b und c . Sei $p \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Punkt. Dann gilt:

$$\text{dist}^2(p, E) = \frac{\langle n, a - p \rangle^2}{\langle n, n \rangle}$$

Dabei soll $n = (b - a) \times (c - a)$ eine Normale des Dreiecks und $E = \{x \in X : \langle x, n \rangle = \langle a, n \rangle\}$ die vom Dreieck aufgespannte Ebene sein.

$$\tilde{p} = \frac{\langle n, a - p \rangle}{\langle n, n \rangle} n + p \in E$$

ist die Projektion von p auf die Ebene E mit $\text{dist}(p, E) = d(p, \tilde{p})$.

2. Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ ein konvexes k -Eck in einer Ebene mit Eckpunkten $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^3$, wobei jeweils zwei mit der Indizierung aufeinander folgende Punkte verbunden sein sollen und a_1 mit a_k verbunden sein soll. Sei $p \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Punkt in der von A aufgespannten Ebene. Dann gilt

$$\text{dist}(p, A) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \text{sign}(s_i) = \text{sign}(s_j) \text{ für alle } i, j \in \{1, \dots, k\} \\ \min_{i \in \{1, \dots, k\}, j \in J} \{d(p, a_i), |s_j|\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei sollen $n_i := n \times (a_{i-1} - a_i)$ für $i \in \{1, \dots, k\}$ die Normalen der k -Eck-Kanten entlang der Ebene sein und $s_i := \langle n_i, a - p \rangle$ die Abstände von p zu den Kantengeraden des Dreiecks,

wobei $a_0 := a_k$.

$$J := \left\{ j \in \{1, \dots, k\} : s_i \frac{n_i}{\|n_i\|} n_i + p \in \{r_i + \lambda(r_{i+1} - r_i) : 0 \leq \lambda \leq 1\} \right\}$$

bezeichnet die Indizes, bei denen die Projektion von p auf die Kantengerade auf der Kante des k -Ecks liegt.

3. Zusammen lässt sich also berechnen:

$$\text{dist}(p, A) = \sqrt{\text{dist}^2(p, E) + \text{dist}^2(\tilde{p}, A)}$$

Beweis:

Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ ein Dreieck mit Eckpunkten a , b und c . Sei $p \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Punkt. Sei $n = (b - a) \times (c - b)$ eine Normale des Dreiecks und $E = \{x \in X : \langle x, n \rangle = \langle a, n \rangle\}$ die vom Dreieck aufgespannte Ebene. Sei $\tilde{p} \in E$ ein Punkt der Ebene mit $\text{dist}(p, E) = d(p, \tilde{p})$ und ϕ der zwischen n und $p - a$ eingeschlossene Winkel wie im linken Teil von Abbildung 4 zu sehen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\langle a - p, \tilde{p} - p \rangle}{\|a - p\| \cdot \|\tilde{p} - p\|} &= \cos \phi = \frac{\langle p - a, n \rangle}{\|p - a\| \cdot \|n\|} \Leftrightarrow \frac{\langle a - p, \tilde{p} - p \rangle}{\|\tilde{p} - p\|} = \frac{\langle a - p, n \rangle}{\|n\|} \\ &\Leftrightarrow \frac{\langle a - p, \tilde{p} - p \rangle}{\|\tilde{p} - p\|} = \frac{\langle a - \tilde{p} + \tilde{p} - p, n \rangle}{\|n\|} = \frac{\langle a - \tilde{p}, n \rangle + \langle \tilde{p} - p, n \rangle}{\|n\|} \\ &= \frac{\langle \tilde{p} - p, n \rangle}{\|n\|} = \frac{\left\langle \frac{\|\tilde{p} - p\|}{\|n\|} n, n \right\rangle}{\|n\|} = \frac{\frac{\|\tilde{p} - p\|}{\|n\|} \langle n, n \rangle}{\|n\|} = \|\tilde{p} - p\| \\ &\Leftrightarrow d^2(\tilde{p}, p) = \|\tilde{p} - p\|^2 = \langle a - p, \tilde{p} - p \rangle = \frac{\|\tilde{p} - p\|}{\|n\|} \langle a - p, n \rangle \\ &\Leftrightarrow d(\tilde{p}, p) = \|\tilde{p} - p\| = \left| \left\langle a - p, \frac{n}{\|n\|} \right\rangle \right| \end{aligned}$$

Nun muss gezeigt werden, dass die Verschiebung von p entlang der Normalen in die richtige Richtung erfolgt. Zu zeigen ist also, dass $\tilde{p} \in E$, wobei

$$\tilde{p} = \left\langle a - p, \frac{n}{\|n\|} \right\rangle \frac{n}{\|n\|} + p$$

Es muss also gezeigt werden, dass die Ebenengleichung $\langle \tilde{p}, n \rangle = \langle a, n \rangle$ erfüllt ist.

$$\langle \tilde{p}, n \rangle = \left\langle \left\langle a - p, \frac{n}{\|n\|} \right\rangle \frac{n}{\|n\|} + p, n \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\|n\|^2} \langle a - p, n \rangle n + p, n \right\rangle = \frac{1}{\|n\|^2} \langle a - p, n \rangle \langle n, n \rangle + \langle p, n \rangle = \langle a - p, n \rangle + \langle p, n \rangle = \langle a, n \rangle$$

Damit ist der erste Teil des Satzes gezeigt.

Da das k -Eck konvex ist und die Normalen so konstruiert sind, dass sie entweder stets von der Kante in das k -Eck zeigen oder stets von der Kante nach außen zeigen, gilt:

$$\text{sign}(s_i) = \text{sign}(s_j) \text{ für alle } i, j \in \{1, \dots, k\}$$

$$\Leftrightarrow p \text{ liegt im Inneren des } k\text{-Ecks}$$

$$\Rightarrow \text{dist}(p, A) = 0$$

Hier gibt keine Äquivalenz, denn die Randpunkte des k -Ecks haben auch keine Distanz zum k -Eck. Allerdings gilt: Liegt p nicht im Inneren des k -Ecks, so ist der nächstgelegene Punkt des k -Ecks zu p auf dem Rand. Ist p bereits auf dem Rand so ist nach dieser Bedingung p selbst

der nächstgelegene Punkt und hat damit keine Distanz zum k -Eck. Ist p ganz außerhalb des k -Ecks, so ist der nächstgelegene Punkt, zu dem die Distanz ermittelt werden soll, entweder ein Eckpunkt oder ein Kantenpunkt. Ist es ein Kantenpunkt, so muss es sich um die Projektion auf die Kantengerade entlang ihrer Normale handeln. Mit einer großzügigen Minimumsbildung folgt nun die Behauptung. ■

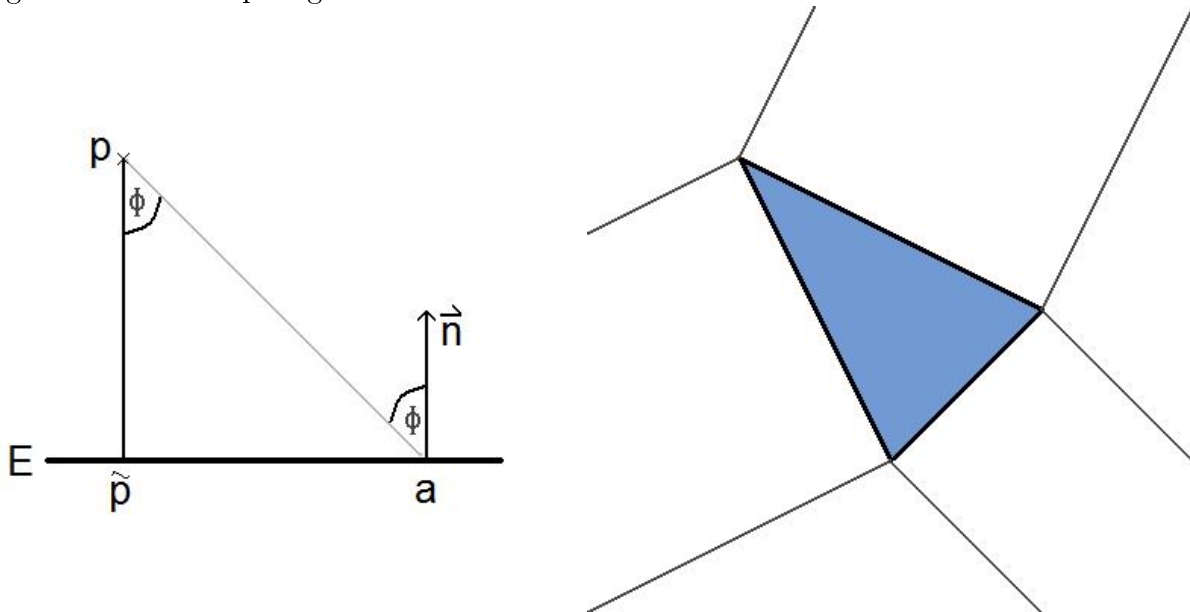


Abbildung 4: zum Beweis von Satz 3.2

3.3 Lemma

Sei $A \subset X$ ein Dreieck. Dann gilt:

$$\max_{e \in E_{x,y,z}} \text{dist}(e, A)$$

Beweis:

Angenommen $\max_{e \in E_{x,y,z}} \text{dist}(e, A) \neq \max_{e \in E_{x,y,z}} \text{dist}(e, A)$. Dann existiert ein $w_0 \in W_{x,y,z} \setminus E_{x,y,z}$, sodass für alle $e \in E_{x,y,z}$ gilt: $\text{dist}(e, A) < \text{dist}(w_0, A)$. Ist w_0 im Inneren des Würfels, es existiere also ein $\epsilon > 0$, sodass für alle $v \in X$ mit $d(w_0, v) < \epsilon$ gilt: $v \in W_{x,y,z}$. Dann gilt nach Satz 3.2 mit entsprechenden Bezeichnungen: $\text{dist}(w_0, A) = \text{dist}(w_0, E) + \text{dist}(\tilde{w}_0, A)$. Da aber w_0 im Inneren des Würfels liegt, kann man w_0 entlang der Normalen des Dreiecks von der Dreiecksebene weg verschieben bis man auf dem Rand des Würfels landet und erhält einen Randpunkt w_1 des Würfels, für den gilt: $\text{dist}(w_1, E) \geq \text{dist}(w_0, E)$ und damit $\text{dist}(w_1, A) \geq \text{dist}(w_0, A) > \text{dist}(e, A)$. Falls w_0 schon auf dem Rand lag, setze einfach $w_1 := w_0$. w_1 liegt also auf einer Seite des Würfels. Der linke Teil der folgenden Abbildung zeigt, warum ein w_2 auf einer Kante dieser Würfelseite existiert, sodass $\text{dist}(w_2, A) \geq \text{dist}(w_1, A)$. Da die Würfelfläche gerade ist, tritt einer der beiden Fälle ein und man findet entweder innerhalb des Bereichs, der der Dreiecksfläche am nächsten ist oder innerhalb des Bereichs, der einer Dreieckskante bzw. einem Dreieckspunkt am nächsten ist.

Analog findet man ein w_3 auf einer Ecke der betrachteten Kante des Würfels, sodass die Behauptung folgt.

In der Abbildung wird das Dreieck A nun in Bereiche eingeteilt, auf denen $\text{dist}(\cdot, A)$ linear ist. Eine lineare Funktion nimmt das Maximum an den Randpunkten an. Deshalb ist zu argumentieren, dass $\text{dist}(\cdot, A)$ auch monoton bei den Übergangsstellen der Bereiche ist. Dies folgt, da alle betrachteten Objekte gerade sind.

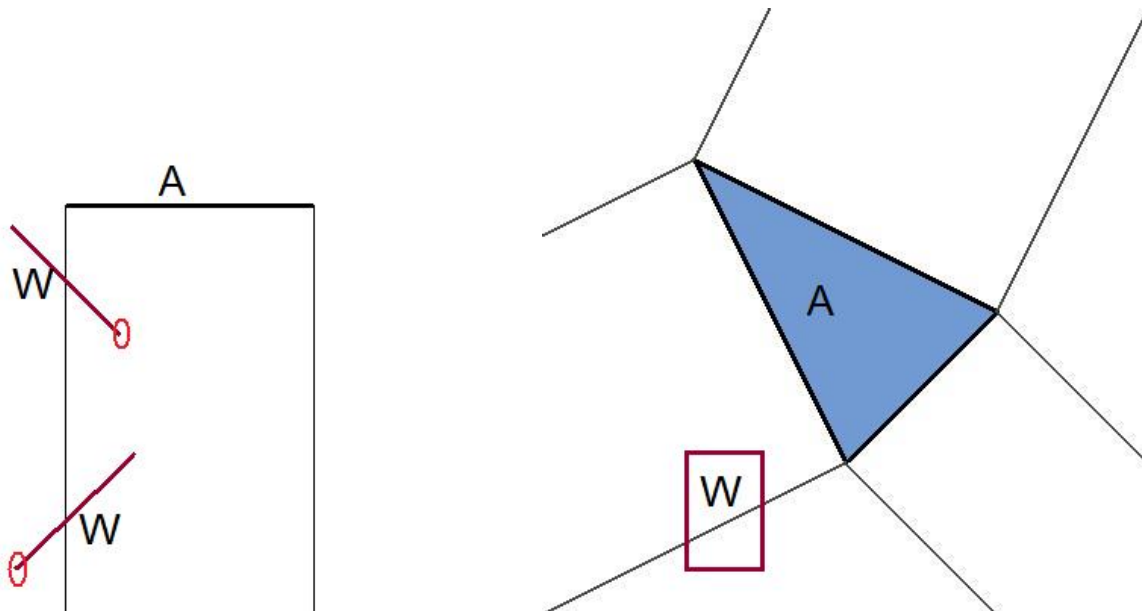


Abbildung 5: zum Beweis von Lemma 3.3

Bemerkung

Für die Bestimmung der minimalen Distanz ist diese Argumentation nicht möglich. Hier ist ein komplizierteres Verfahren nötig, das im Folgenden vorgestellt wird. Dabei wird das Problem jedoch auch wieder auf Punkt-Vielecks-Tests zurückgeführt, sodass Satz 3.2 angewendet werden kann.

3.4 Satz (Würfel-Dreieck-Distanz)

1. Sei $A \subset X$ ein Dreieck. Dann gilt:

$$\text{mindist}(W_{x,y,z}, A) = \min \left\{ \text{mindist}(\Pi_x(W_{x,y,z}), \Pi_x(A \cap \Omega_x)), \text{mindist}(\Pi_y(W_{x,y,z}), \Pi_y(A \cap \Omega_y)), \right. \\ \left. \text{mindist}(\Pi_z(W_{x,y,z}), \Pi_z(A \cap \Omega_z)), \min_{e \in E_{x,y,z}} \text{dist}(e, A) \right\}$$

2. Sei $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^2$ ein n -Eck (das Resultat aus 1 liefert: $n \in \{3, 4, 5\}$ möglich) mit den Eckpunkten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^2$. Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein Quadrat. Dann lässt sich $\text{mindist}(Q, \tilde{A})$ auf analoge Weise in einer Dimension weniger bestimmen.

3. Sei $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^1$ zusammenhängend. Sei $[a, b] = I \subset \mathbb{R}^1$ ein Intervall. Dann lässt sich $\text{mindist}(I, \tilde{A})$ auf analoge Weise in einer Dimension weniger bestimmen.

Bemerkung

Die Idee zur Bestimmung der minimalen Distanz zwischen Würfel und Dreieck ist folgende: Man teilt den Raum in Bereiche ein. Dazu verlängert man zunächst den Würfel in jeder Dimension getrennt, sodass drei Schläuche entstehen, die in Abbildung 6 dargestellt sind. Die Wände ${}_1\Omega_x$, ${}_2\Omega_y$ und ${}_3\Omega_z$ entstehen dann dadurch, dass je zwei Schläuche nochmals in ihre „aufspannende“ Wand ausgedehnt werden. Diese ist in die Abbildung nur oben links schematisch eingezeichnet. Trennt man den Raum durch die drei Wände, so entstehen acht Bereiche des Raumes. Sie sind ähnlich wie Oktanten, ergeben zusammen jedoch nicht den ganzen Raum. Diese acht Bereiche sind zu jeweils einer bestimmten Ecke des Würfels am nächsten.

Die Wandbereiche selbst gliedern sich auch wieder. Je zwei Schläuche teilen jede Wand in vier Bereiche auf. Insgesamt entstehen also zwölf Bereiche, die jeweils einer bestimmten Kante des Würfels am nächsten sind.

Die Schläuche werden durch den Würfel selbst nochmals in zwei Bereiche aufgeteilt. Es entstehen also nochmal sechs Bereiche, die jeweils einer bestimmten Fläche des Würfels am nächsten sind.

Die Abstandsberechnung zwischen Eckpunkt und Dreieck kennt man bereits aus Satz 3.2.

Für die Abstandsberechnung zwischen Kante und Dreieck nutzt man aus, dass dieser nicht im ganzen Raum, sondern nur innerhalb einer Wand erfolgen muss. Deshalb kann man die Wand zusammendrücken und alles, was darin ist, wird auf eine Ebene projiziert. Damit muss man nur noch einen Test zwischen Punkt und n -Eck in der Ebene durchführen.

Für die Abstandsberechnung zwischen Fläche und Dreieck nutzt man aus, dass dieser nicht im ganzen Raum, sondern nur innerhalb eines Schlauches erfolgen muss. Die Wand wurde bereits zusammengedrückt und die ehemalige Seitenfläche des Würfels ist nun ein Liniensegment. Drückt man nun den Schlauch nochmal in seiner zweiten Dimension zusammen, so ist nun alles, was sich innerhalb des Schlauches befand, auf eine Gerade projiziert worden und darauf ist nun eine einfache Abstandsberechnung durchzuführen.

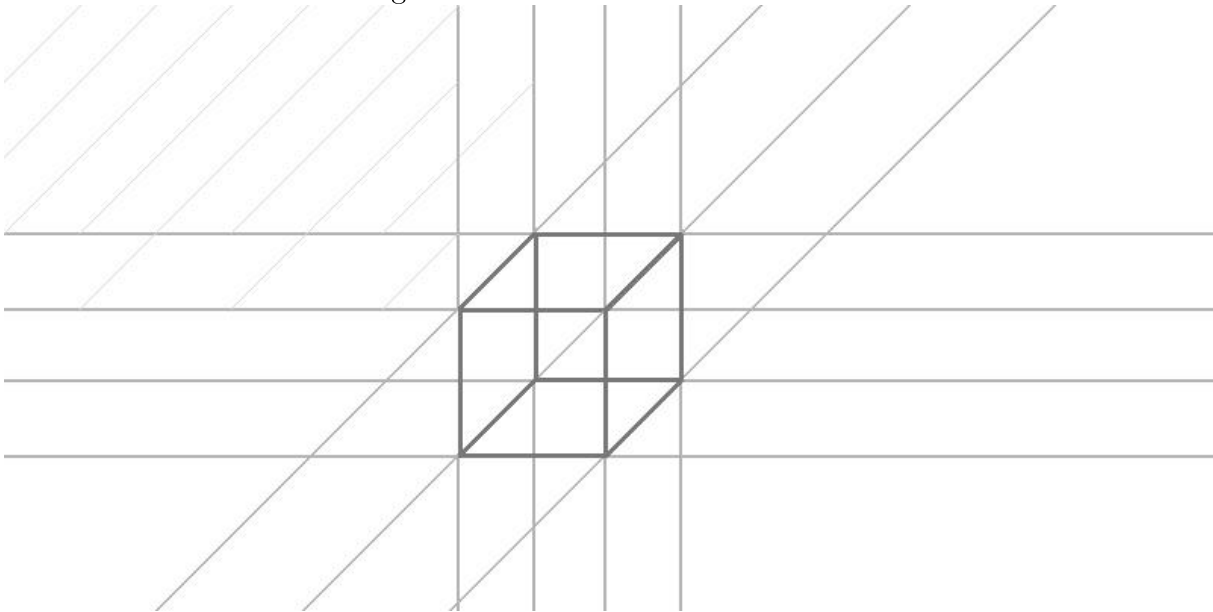


Abbildung 6: Aufteilung des Raumes

Satz (Würfel-Dreieck-Distanz)

Beweis:

1. Sei $A \subset X$ ein Dreieck und $W_{x,y,z}$ ein Voronoi-Würfel. A lässt sich gemäß Abbildung 4 aufteilen in Teile, die in unterschiedlichen Bereichen liegen.

Sei $\{e_1, \dots, e_8\} := E_{x,y,z}$ die Eckenmenge des Würfels. Setze für $i \in \{1, \dots, 8\}$

$$B_i := \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \text{für } j \in \{1, 2, 3\} : \right.$$

$$p_j \leq -1 + \frac{2k_j}{\omega} \text{ wenn } \delta_j = 0 \text{ bzw. } p_j \geq -1 + \frac{2(k_j + 1)}{\omega} \text{ wenn } \delta_j = 1,$$

$$\left. \text{wobei } k_1 = x, k_2 = y, k_3 = z, e_i = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2(x+\delta_1)}{\omega} \\ -1 + \frac{2(y+\delta_2)}{\omega} \\ -1 + \frac{2(z+\delta_3)}{\omega} \end{pmatrix} : \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \{0, 1\} \right\}$$

Setze $A_i := A \cap B_i$. Es gilt $\text{mindist}(W_{x,y,z}, A_i) = \text{dist}(e_i, A_i)$. Denn angenommen es existiert ein $w \in W_{x,y,z}$ mit $\text{mindist}(W_{x,y,z}, A_i) = \text{dist}(w, A_i) < \text{dist}(e_i, A_i)$, dann unterscheidet sich $w = (w_1 \ w_2 \ w_3)$ von e_i in der j -ten Koordinate. Nach Konstruktion von B_i wird aber die Distanz zu B_i durch Verschiebung der j -ten Koordinate in Richtung des Eckpunktes kleiner, da w_j zwischen den Eckpunktskoordinaten liegt. Also wird auch die Distanz zu A_i kleiner, da $A_i \subset B_i$. Analog lassen sich alle Koordinaten von w auf die Eckpunktskoordinaten verschieben und damit gilt $\text{dist}(w, A_i) \geq \text{dist}(e_i, A_i)$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme und damit gilt $\text{mindist}(W_{x,y,z}, A_i) = \text{dist}(e_i, A_i)$.

Es fehlt noch die anderen Bereiche von A zu betrachten. Offensichtlich ist $X = B_1 \cup \dots \cup B_8 \cup {}_1\Omega_x \cup {}_2\Omega_y \cup {}_3\Omega_z$. Betrachte also $\Omega = {}_1\Omega_x$, denn für ${}_2\Omega_y$ und ${}_3\Omega_z$ gilt das analog. Setze also $A_0 := A \cap \Omega$. A_0 kann nun ein konvexes Drei-, Vier- oder Fünfeck sein, wie man aus der unten stehenden Abbildung erkennt.

$\text{mindist}(W_{x,y,z}, A_0)$ ist unabhängig von der ersten Koordinate in Ω . Denn für jeden Würfelpunkt $w = (w_1 \ w_2 \ w_3) \in W_{x,y,z}$ ist für jedes $v \in \mathbb{R}$ auch $(v \ w_2 \ w_3) \in W_{x,y,z}$, falls $(v \ w_2 \ w_3) \in \Omega$. Damit kann die erste Koordinate auch einfach weggelassen werden und es gilt $\text{mindist}(W_{x,y,z}, A_0) = \text{mindist}(Q, \tilde{A})$, wobei $\tilde{A} := \Pi_{(2,3)}(A_0)$ und $Q := \Pi_{(2,3)}(W_{x,y,z})$. Das Problem ist nun auf eine niedrigere Dimension reduziert.

2. Sei $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^2$ ein n -Eck und $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ein Quadrat. Der nun folgende Beweis folgt dem Vorgehen aus einer Dimension höher.

Setze $\tilde{B}_1 := \{(x \ y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq a, y \leq c\}$, $\tilde{B}_2 := \{(x \ y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq b, y \leq c\}$,
 $\tilde{B}_3 := \{(x \ y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq a, y \geq d\}$, $\tilde{B}_4 := \{(x \ y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq b, y \geq d\}$.

Für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ setze $\tilde{A}_i := \tilde{A} \cap \tilde{B}_i$. Mit der gleichen Begründung wie im ersten Fall gilt: $\text{mindist}(Q, \tilde{A}_1) = \text{dist}((a \ c), \tilde{A}_1)$, $\text{mindist}(Q, \tilde{A}_2) = \text{dist}((b \ c), \tilde{A}_2)$, $\text{mindist}(Q, \tilde{A}_3) = \text{dist}((a \ d), \tilde{A}_3)$, $\text{mindist}(Q, \tilde{A}_4) = \text{dist}((b \ d), \tilde{A}_4)$.

Es fehlt noch die anderen Bereiche von \tilde{A} zu betrachten. Setze $S_1 := [a, b] \times \mathbb{R}$, $S_2 := \mathbb{R} \times [c, d]$. Offensichtlich ist $\mathbb{R}^2 = \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2 \cup \tilde{B}_3 \cup \tilde{B}_4 \cup S_1 \cup S_2$. Betrachte also $\tilde{A}_0 := \tilde{A} \cap \mathbb{R}^2$, denn für S_2 gilt das analog.

$\text{mindist}(Q, \tilde{A}_0)$ ist unabhängig von der ersten Koordinate in S_1 . Denn für jeden Quadratpunkt $q = (q_1 \ q_2) \in Q$ ist für jedes $p \in \mathbb{R}$ auch $(p \ q_2) \in Q$, falls $(p \ q_2) \in S_1$. Damit kann die erste Koordinate auch einfach weggelassen werden und es gilt $\text{mindist}(Q, \tilde{A}_0) = \text{mindist}(I, \tilde{\tilde{A}})$, wobei $\tilde{\tilde{A}} := \Pi_{(2)}(\tilde{A}_0)$ und $I := \Pi_{(2)}(Q)$. Das Problem ist nun auf eine niedrigere Dimension reduziert.

3. Sei $\tilde{\tilde{A}} \subset \mathbb{R}^1$ das minimal große Intervall, das $\mathbb{N} \ni n$ Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ enthält. Sei

$$[a, b] = I \subset \mathbb{R}^1 \text{ ein Intervall. Dann ist } \text{dist}(A, I) = \begin{cases} \min_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_i - a|, & \text{wenn } \forall_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i < a \\ \min_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_i - b|, & \text{wenn } \forall_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i > b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dieses Vorgehen ist wieder analog zu den höheren Dimensionen, wobei die ersten beiden Fälle den Abständen zu den Punkten entsprechen und bei einer Überschneidung der Intervalle nichts mehr zu tun ist. ■

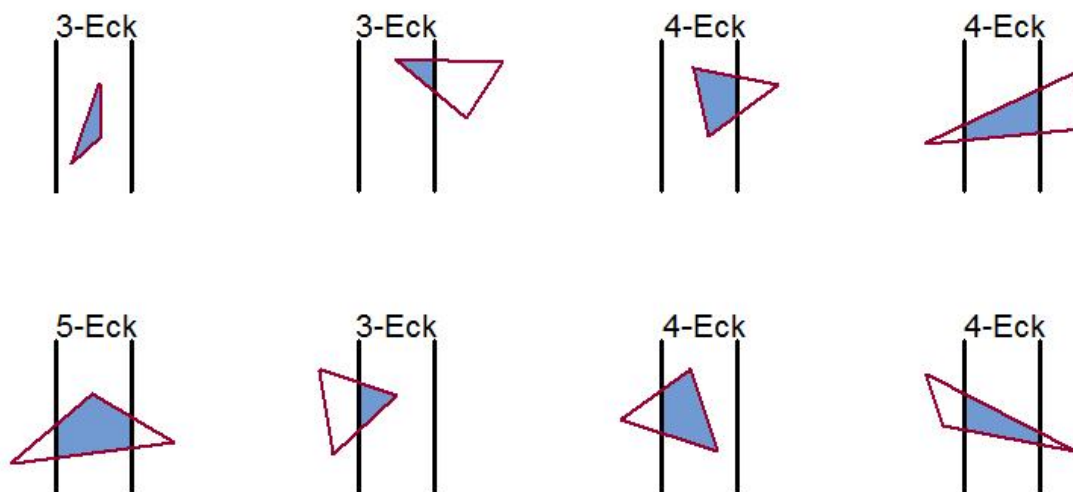


Abbildung 7: zum Beweis von Satz 3.4

3.5 Beispiel

$W = [-0.2, 0.2] \times [-0.2, 0.2] \times [-0.2, 0.2]$ ist der Voronoi-Würfel in der Mitte des Raumes X bei $\omega = 5$. Es ist also $W = W_{2,2,2}$.

Ein Dreieck A sei gegeben durch die Punkte $a = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.3 \\ 0.6 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.7 \\ -0.4 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -0.9 \\ -0.3 \\ 0.6 \end{pmatrix}$. Dann

ist $\maxdist(W, A) = \max_{e \in E_{2,2,2}} dist(e, A)$. Exemplarisch wird nun \tilde{e} für $e = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ berechnet.

$$n = (b - a) \times (c - b) = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} \text{ und damit ist } \tilde{e} = \frac{\langle n, a - p \rangle}{\langle n, n \rangle} n + p = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.05 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

3.6 Beschreibung

In Kapitel 4 wird ein weiteres Objekt hinzugefügt. Betrachtet man einen einzelnen Punkt des zweiten Objekts, so ist der Abstand von diesem Punkt zum ersten Objekt gleich dem Abstand zum Dreieck, in dessen Voronoi-Region er sich befindet. Denn das ist gerade die Eigenschaft der Voronoi-Regionen. Dies gilt nicht nur für einen einzelnen Punkt, sondern auch für ganze Dreiecke des zweiten Objekts. Diese können dann mit mehreren Voronoi-Regionen überlappen. In der diskreten Betrachtung der Voronoi-Regionen müssen dann die Dreiecke nicht auf Überlappung mit Voronoi-Regionen, sondern auf Überlappung mit Voronoi-Würfeln getestet werden.

In Lemma 3.1 wurde gezeigt, dass für jeden Punkt eines Voronoi-Würfels als nächstgelegene Dreiecke keine Dreiecke in Frage kommen, die nicht in der Nahe-Mengen-Liste auftauchen. Denn in Frage kommen nur Dreiecke, deren Voronoi-Regionen (teilweise) innerhalb des Würfels liegen. Deshalb können die Dreiecke, die nicht in der Nahe-Mengen-Liste auftauchen von der Abstandsberechnung ausgeschlossen werden.

Um die Nahe-Mengen-Liste zu erstellen ist für jeden Würfel zu prüfen welche Dreiecke am nächstgelegenen sein können. Dazu berechnet man für jedes Dreieck die minimale und maximale Distanz aus Sicht des Würfels. Es wird das Minimum über die maximalen Distanzen gebildet. Dreiecke, deren minimale Distanz dann noch größer ist, können nicht am nächsten zu

einem beliebigen Punkt des Würfels sein. Deshalb kommen diese nicht in die Nahe-Mengen-Liste.

In Lemma 3.3 wurde gezeigt, dass zur Bestimmung von $maxdist(W_{x,y,z}, A)$ nur die Distanz aller Eckpunkte zum Dreieck berechnet werden muss und der größte Wert genommen werden kann. Satz 3.2 beschreibt, wie die Rechnung genau auszusehen hat.

Satz 3.4 liefert schließlich ein Verfahren zur Bestimmung von $mindist(W_{x,y,z}, A)$.

Die Beweise der Sätze sind konstruktiv. Deshalb können die Funktionsweisen der im Pseudocode nicht beschriebenen Methoden daraus entnommen werden.

3.7 Pseudocode

Δ sei die Dreiecksmenge, zu der die Nahe-Mengen-Liste bestimmt werden soll.

```

createCFL( $\omega \in \mathbb{N}, \Delta$ )
  CFL =  $\emptyset$ 
  forall( $(x, y, z) \in \{0, 1, \dots, \omega - 1\}^3$ )
    CFL $_{x,y,z}$  =  $\emptyset$ 
    forall( $A \in \Delta$ )
      CFL $_{x,y,z}$  = CFL $_{x,y,z} \cup (A, mindist(W_{x,y,z}, A), maxdist(W_{x,y,z}, A))$ 
      minmax =  $min(\Pi_{(3)}(CFL_{x,y,z}))$ 
      forall( $A \in \Pi_{(1)}(CFL_{x,y,z})$ )
        if( $mindist(W_{x,y,z}, A) > minmax$ ) : CFL $_{x,y,z} = CFL_{x,y,z} \setminus A$ 
      CFL = CFL  $\cup$  CFL $_{x,y,z}$ 
  return(CFL)

```

```

mindist( $W_{x,y,z}, A \in \Delta$ )
  dist =  $\infty$ 
  if( $dist > mindist(\Pi_{(2,3)}(W_{x,y,z}), \Pi_{(2,3)}(A \cap_1 \Omega_x))$ ) :
    dist =  $mindist(\Pi_{(2,3)}(W_{x,y,z}), \Pi_{(2,3)}(A \cap_1 \Omega_x))$ 
  if( $dist > mindist(\Pi_{(1,3)}(W_{x,y,z}), \Pi_{(1,3)}(A \cap_2 \Omega_y))$ ) :
    dist =  $mindist(\Pi_{(1,3)}(W_{x,y,z}), \Pi_{(1,3)}(A \cap_2 \Omega_y))$ 
  if( $dist > mindist(\Pi_{(1,2)}(W_{x,y,z}), \Pi_{(1,2)}(A \cap_3 \Omega_z))$ ) :
    dist =  $mindist(\Pi_{(1,2)}(W_{x,y,z}), \Pi_{(1,2)}(A \cap_3 \Omega_z))$ 
  forall( $e \in E_{x,y,z}$ )
    if( $dist > dist(e, A)$ ) : dist =  $dist(e, A)$ 
  return(dist)

```

3.8 Laufzeitanalyse

Eine wichtige Frage der Laufzeitanalyse ist: Wie ist die Zahl der Würfel ω^3 sinnvollerweise zu wählen? Denn offensichtlich erhöht eine große Zahl von Würfeln die Laufzeit des ersten Teils und senkt die Laufzeit des zweiten Teils.

Da der Algorithmus dafür ausgelegt ist, dass der zweite Teil sehr oft durchgeführt wird und der erste Teil nur einmal, ist die Laufzeit des ersten Teils weniger wichtig. Allerdings ist es auch nicht sinnvoll die Laufzeit des ersten Teils beliebig zu erhöhen, um die Laufzeit des zweiten Teils zu senken. Denn auch die erste Berechnung sollte in angemessener Zeit durchgeführt werden können. Hier spielen also praktische Ergebnisse eine Rolle und die Frage nach geeignetem ω kann nicht nur theoretisch geklärt werden. In der Laufzeitanalyse 4.5 und in Kapitel 5 wird darauf noch eingegangen.

Eigentliche Problemgröße ist die Zahl der Dreiecke. Die Bestimmung von $mindist(W_{x,y,z}, A)$

und $\text{maxdist}(W_{x,y,z}, A)$ hängt nicht von der Anzahl der Würfel oder Dreiecke ab. Man sieht also leicht, dass die Laufzeit linear in der Anzahl der Würfel ω^3 und linear in der Anzahl der Dreiecke $|\Delta|$ ist.

Eine wichtige Resultatsgröße ist die Länge der Nahe-Mengen-Liste. Sie ist maßgebend für die Laufzeit des zweiten Teils, denn je mehr Dreiecke in der Nahe-Mengen-Liste auftauchen, desto mehr Vergleiche müssen im zweiten Teil durchgeführt werden.

Leider kann auch hier keine rein theoretische Überlegung stattfinden. Die Dreiecke können im Allgemeinen sehr entartet sein und sich über ganz X erstrecken oder auf sehr dichtem Raum zusammengedrückt sein, sodass für einen allgemeinen Fall keine Aussage über die Länge der Nahe-Mengen-Liste gemacht werden kann. Es gilt zwar $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |CFL| = 1$ und $\lim_{\omega \rightarrow 1} |CFL| = |\Delta|$, aber was dazwischen genau passiert hängt von der Beschaffenheit der Dreiecke ab.

Kapitel 4

Algorithmus - Teil 2: Abstandsberechnung für zwei Polyeder

In diesem Kapitel wird ein Verfahren beschrieben, wie man mit Hilfe der diskreten Voronoi-Diagramme den geringsten Abstand zweier Dreiecksmengen ermitteln kann.

Bemerkung

Dieser Algorithmus-Teil ist dafür gedacht, dass er mehrmals auf die gleichen Polyeder angewendet wird. Sie ändern lediglich ihre Lage im Raum durch eine starre Transformation [5]. Die ermittelten Voronoi-Würfel mit Nahe-Mengen-Liste werden dabei auch transformiert. Dadurch verlieren sie eventuell ihre Achsenorientierung. Für diesen Fall betrachtet man jedoch weiter die ursprüngliche Nummerierung der Würfel.

Da jetzt zwei Dreiecksmengen Δ^A und Δ^B betrachtet werden, fügt man einen hochgestellten Index an Dreiecksmengen, Nahe-Mengen-Listen und Voronoi-Würfel an, um ihre Zugehörigkeit zu kennzeichnen.

4.1 Satz (Dreieckspaar-Wahl)

$\Delta^A = \{A_1, \dots, A_n\}$ und $\Delta^B = \{B_1, \dots, B_m\}$ seien zwei Dreiecksmengen mit Nahe-Mengen-Listen CFL^A und CFL^B . Seien $A \in \Delta^A$ und $B \in \Delta^B$ beliebig.

1. Gilt

„Für alle $W_{x,y,z}^B$ mit $W_{x,y,z}^B \cap A \neq \emptyset$ ist $B \notin \Pi_{(1)}(CFL_{x,y,z}^B)$ “
oder

„Für alle $W_{x,y,z}^A$ mit $W_{x,y,z}^A \cap B \neq \emptyset$ ist $A \notin \Pi_{(1)}(CFL_{x,y,z}^A)$ “,
dann gilt:

$$\text{mindist}(A_1 \cup \dots \cup A_n, B_1 \cup \dots \cup B_m) < \text{mindist}(A, B)$$

2. Gibt es ein $A_0 \in \Delta^A$ und ein $B_0 \in \Delta^B$,

sodass $\text{mindist}(A_0, B_0) < \text{mindist}(W_{x,y,z}^A, A)$ und $\text{mindist}(A_0, B_0) < \text{mindist}(W_{x,y,z}^B, B)$

für alle $W_{x,y,z}^A$ mit $W_{x,y,z}^A \cap B \neq \emptyset$ und alle $W_{x,y,z}^B$ mit $W_{x,y,z}^B \cap A \neq \emptyset$.

Dann gilt:

$$\text{mindist}(A_1 \cup \dots \cup A_n, B_1 \cup \dots \cup B_m) < \text{mindist}(A, B)$$

Beweis:

1. Seien $A \in \Delta^A$ und $B \in \Delta^B$ beliebig. Für alle $W_{x,y,z}^B$ mit $W_{x,y,z}^B \cap A \neq \emptyset$ sei $B \notin \Pi_{(1)}(CFL_{x,y,z}^B)$. Dann ist nach Lemma 3.1 auch $B \notin \{B_i : i \in \{1, \dots, m\} \text{ } V_i \cap W_{x,y,z}^B \neq \emptyset\}$, wobei V_i die Voronoi-Region von B_i bezeichnet. Damit ist $V \cap W_{x,y,z}^B = \emptyset$, wobei V die Voronoi-Region von B bezeichnet. Es sei $W := \bigcup W_{x,y,z}^B : W_{x,y,z}^B \cap A \neq \emptyset$ die Vereinigung aller Würfel, in denen A liegt. Dann

gilt auch hier $V \cap W = \emptyset$. Da aber die Voronoi-Regionen den ganzen Raum ausfüllen, existiert ein $B_0 \in \Delta^B$, sodass für dessen Voronoi-Region V_0 gilt: $V_0 \cap A \neq \emptyset$. Damit ist $\text{mindist}(A, B_0) < \text{mindist}(A, B)$ und damit auch $\text{mindist}(A_1 \cup \dots \cup A_n, B_1 \cup \dots \cup B_m) < \text{mindist}(A, B)$. Für vertauschte Rollen von A und B gilt das genauso.

2. Seien $A \in \Delta^A$ und $B \in \Delta^B$ beliebig. Es existiere ein $A_0 \in \Delta^A$ und ein $B_0 \in \Delta^B$, sodass $\text{mindist}(A_0, B_0) < \text{mindist}(W_{x,y,z}^A, A)$ und $\text{mindist}(A_0, B_0) < \text{mindist}(W_{x,y,z}^B, B)$ für alle $W_{x,y,z}^A$ mit $W_{x,y,z}^A \cap B \neq \emptyset$ und alle $W_{x,y,z}^B$ mit $W_{x,y,z}^B \cap A \neq \emptyset$. Dann ist analog zum ersten Beweis $\text{mindist}(A, B) > \text{mindist}(W_{x,y,z}^A, A)$ oder $\text{mindist}(A, B) > \text{mindist}(W_{x,y,z}^B, B)$ und damit $\text{mindist}(A, B) > \text{mindist}(A_0, B_0)$, also auch $\text{mindist}(A_1 \cup \dots \cup A_n, B_1 \cup \dots \cup B_m) < \text{mindist}(A, B)$. ■

Bemerkung

In diesem Teil des Algorithmus soll der Abstand von zwei Dreiecksmengen Δ^A und Δ^B mit Hilfe ihrer Nahe-Mengen-Listen bestimmt werden. Dazu werden Dreiecke aus Δ^A paarweise mit Dreiecken aus Δ^B verglichen. Es sollen jedoch nicht alle möglichen Kombinationen von Dreieckspaaren betrachtet werden, sondern nur sehr wenige. Satz 4.1 gibt Auskunft darüber welche Dreieckspaare (A, B) , wobei $A \in \Delta^A$ und $B \in \Delta^B$, von der Abstandsermittlung ausgeschlossen werden können. Um die Voraussetzungen von Satz 4.1 zu prüfen ist jedoch ein Kollisionstest zwischen Würfel und Dreieck nötig, denn es muss herausgefunden werden, ob $W_{x,y,z}^B \cap A \neq \emptyset$ bzw. ob $W_{x,y,z}^A \cap B \neq \emptyset$. Dazu ist bereits ein Verfahren aus dem letzten Kapitel bekannt, denn man kann Satz 3.4 anwenden und prüfen, ob der Abstand zwischen Dreieck und Würfel verschwindet. Dieses Verfahren ist jedoch garnicht effizient, wenn man nur wissen will, ob sich die beiden Objekte schneiden oder nicht. Der genaue Abstand spielt in Satz 4.1 keine Rolle.

Das „separating axis theorem“ besagt, dass zwei konvexe Objekte im Raum sich genau dann schneiden, wenn eine separierende Ebene existiert. Dieses könnte man für das bestehende Problem verwenden. Eine Prüfung jedes einzelnen Würfels auf Kollision mit einem Dreieck ist hier jedoch auch nicht vorteilhaft. Eine gute Strategie ist es groß Quader, die entsprechend der Voronoi-Würfel orientiert sind, um das Dreieck zu legen, diese auf Kollision zu prüfen und gegebenenfalls zu verfeinern. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt bis man auf der Größe von Voronoi-Würfel angekommen ist. Die Quader werden immer weiter verfeinert und es entsteht eine Baumstruktur von „orientierten Rahmen (OBB)“. Dadurch erhält man noch schneller alle Würfel, mit denen sich das Dreieck schneidet. Genauere Informationen zu OBB-Trees und dem separating axis theorem sind in [3] zu finden.

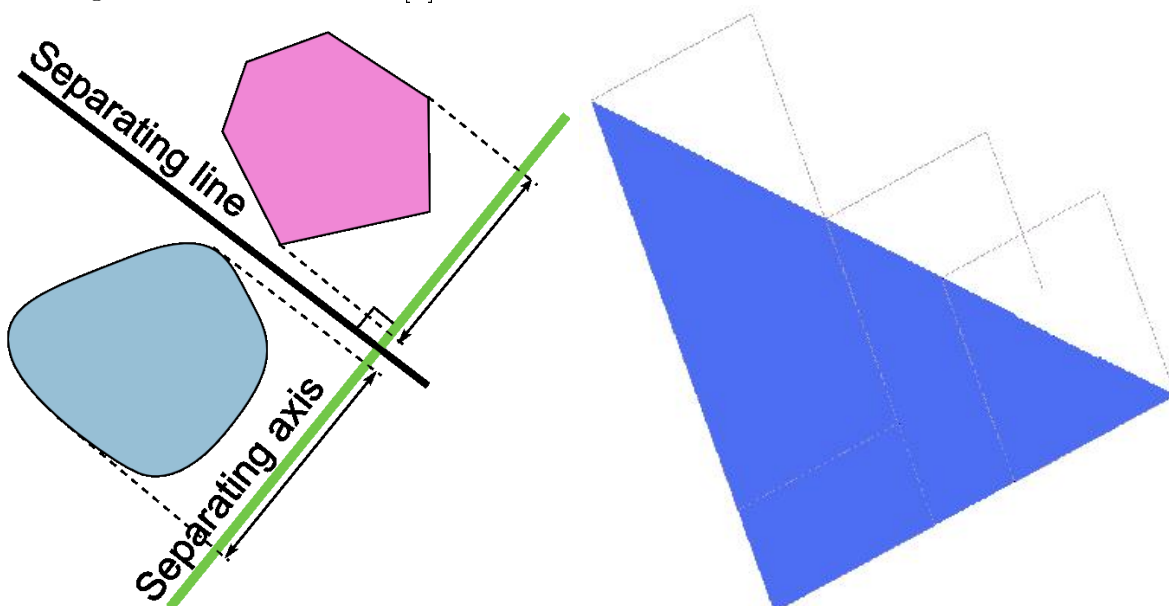


Abbildung 8: Separierende Ebene (links) und OBBs um ein Dreieck (rechts)

4.2 Satz (Dreieck-Dreieck-Distanz)

Seien A und B zwei Dreiecke mit Eckpunkten a_1, a_2, a_3 bzw. b_1, b_2, b_3 . Dann gilt:

$$\text{mindist}(A, B) = \min \{ \text{dist}(a_1, B), \text{dist}(a_2, B), \text{dist}(a_3, B), \text{dist}(b_1, A), \text{dist}(b_2, A), \text{dist}(b_3, A), \text{kantendist}(A, B) \}$$

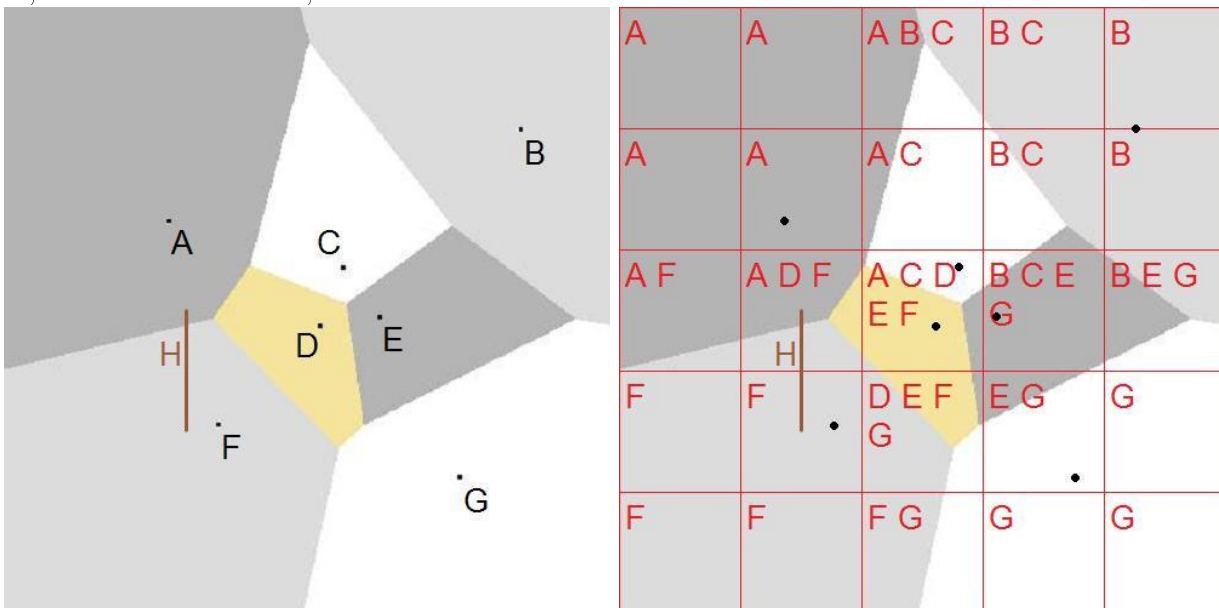
$\text{kantendist}(A, B)$ wird formal nicht eingeführt. Man betrachtet die Kantenmenge von A und die Kantenmenge von B . $\text{kantendist}(A, B)$ berechnet sich dadurch, dass zwischen Kantengeraden paarweise der kürzeste Abstand ermittelt wird. Wird dieser kürzeste Abstand jeweils auf den Dreiecken angenommen, so liegt hier ein Abstandsminimum der Dreiecksseiten vor.

Beweis:

Ein Dreieck besteht aus drei Eckpunkten, drei Kanten und der Fläche. Zwei Dreiecke können den kürzesten Abstand auf irgendeiner Kombination dieser Komponenten. Diese werden im Beweis alle ermittelt und das Minimum bestimmt. Der Abstand der beiden Dreiecke muss irgendwo angenommen werden. Die Dreiecksflächen können zwar auch am nächsten zu einander gelegen sein, dann liegen die Dreiecke parallel und dann existiert auch irgend ein Dreieckspunkt eines Dreiecks, der dem andern Dreieck am nächsten ist. Zur Bestimmung der Distanz von zwei Geraden, legt man eine Ebene durch den Punkt einer Geraden mit den Steigungen der beiden Geraden. Danach ermittelt man den Abstand der Geraden, die nicht auf dieser Ebene liegt, zu dieser Ebene. ■

4.3 Beschreibung

Die folgende Abbildung zeigt, wie man verfährt, wenn ein Objekt H auf Abstand zu den gegebenen Punkten A, B, C, D, E, F und G überprüft werden soll. Im kontinuierlichen Fall links erkennt man, dass H in den Voronoi-Regionen von A und F liegt. Daher kommen nur A und F als nächstgelegene Punkte in Frage. Allerdings sind durch die Diskretisierung rechts gewisse Informationen verloren gegangen. H liegt in zwei Voronoi-Würfeln. Im oberen Würfel findet man die Information, dass A, D und F in Frage kommen am nächsten gelegen zu sein. Im unteren Würfel findet man die Information, dass nur F in Frage kommt am nächsten gelegen zu sein. Insgesamt kommen also A, D und F in Frage. Im Algorithmus wird zunächst auch die Rückprüfung vorgenommen, ob H auch in der Nahe-Mengen-Liste eines Würfels, mit dem sich A, D und F schneiden, befindlich ist.



4.4 Pseudocode

Δ^A und Δ^B seien die Dreiecksmengen mit Nahe-Mengen-Listen CFL^A und CFL^B .

```

distance( $\omega \in \mathbb{N}, \Delta^A, \Delta^B, CFL^A, CFL^B$ )
  TEST =  $\emptyset$ 
  dist =  $\infty$ 
  forall( $A \in \Delta^A$ )
     $W_A = \{W_{x,y,z}^B : A \cap W_{x,y,z}^B \neq \emptyset\}$ 
     $CFL_A = \bigcup CFL_{x,y,z}^B \in CFL^B : W_{x,y,z}^B \in W_A$ 
    forall( $B \in \Pi_{(1)}(CFL_A)$ )
       $W_B = \{W_{x,y,z}^A : B \cap W_{x,y,z}^A \neq \emptyset\}$ 
       $CFL_B = \bigcup CFL_{x,y,z}^A \in CFL^A : W_{x,y,z}^A \in W_B$ 
      if( $A \in \Pi_{(1)}(CFL_B)$ ) : TEST = TEST  $\cup$  (A, B)
  forall( $(A, B) \in TEST$ )
    if( $mindist(A, B) < dist$ ) : dist = mindist(A, B)
  return(dist)

```

4.5 Laufzeitanalyse

Es wird zuerst eine Schleife über alle Dreiecke von Δ^A durchlaufen. Wenn die Polyeder also unterschiedlich viele Dreiecke enthalten, ist es sinnvoll für Δ^A die kleinere Dreiecksmenge zu benutzen. Da ein Dreieck zweidimensional ist, ist $|W_A| \in O(\omega^2)$. Über $|CFL_A|$ kann jedoch schon keine Aussage mehr gemacht werden. Wichtig ist, dass $|TEST|$ möglichst gering wird. Da $TEST = \{(A, B) \in \Delta^A \times \Delta^B : A \in CFL_B, B \in CFL_A\}$, ist eine obere Schranke $|CFL_A| \geq |TEST|$. Es wird also auf die praktischen Resultate verwiesen.

Kapitel 5

Resultate

5.1 Algorithmus in der Praxis

Der Algorithmus wurde in der Programmiersprache C++ implementiert und getestet. Sicherlich ist die Laufzeit für das Erstellen der Nahe-Mengen-Liste abhängig von den verwendeten Ressourcen am Computer. Getestet wurde an einem Computer mit 2 GB Arbeitsspeicher und 1.8 GHz CPU-Taktung. Es wurden verschiedene Dreiecksmengen und verschiedene Würfelzahlen getestet und die Laufzeit ermittelt.

	$\omega = 5$	$\omega = 10$	$\omega = 15$	$\omega = 20$	$\omega = 30$	$\omega = 50$
12 Dreiecke	0.2 s	1.0 s	3.4 s	7.9 s	24 s	109 s
1704 Dreiecke	13.1 s	105 s	353 s	14 min	49 min	3.5 h
16532 Dreiecke	154 s	20 min	67 min	2.6 h	9 h	41 h

Man erkennt, dass sich die Laufzeit etwa proportional zur Anzahl der Würfel und proportional zur Anzahl der Dreiecke verhält. Die etwas geringere Laufzeit bei Testobjekt 2 liegt vermutlich an dessen einfacher Beschaffenheit.

In [2] wird beschrieben, dass der Algorithmus für ein Polyeder, das aus 1314 Dreiecken besteht, auf einem 30 x 30 x 30 - Gitter ungefähr 40 Minuten benötigt. Dies geht mit der Berechnung in 49 Minuten für etwas mehr Dreiecke konform.

Es ist dort außerdem eine Tabelle zu finden, die die durchschnittliche Zahl der Dreiecke in der Nahe-Mengen-Liste beschreibt. Es wurde ein Polyeder, das aus 1314 Dreiecken besteht, verwendet.

	$\omega = 10$	$\omega = 15$	$\omega = 20$	$\omega = 30$
CFL-Länge	29.08	11.92	10.90	6.35

In [2] werden die Laufzeitresultate des zweiten Teils beschrieben. Für $\omega = 30$ kann bei dem betrachteten Polyeder mit 1314 Dreiecken die Zahl der Dreieckspaar-Vergleiche auf durchschnittlich 172 reduziert werden. Die naive Abstandsberechnung hätte 1726596 Dreieckspaar-Vergleiche erfordert.

5.2 Diskussion

Bei der Implementierung ist zwischen euklidischem Abstand und quadratischem euklidischem Abstand zu unterscheiden. Der quadratische Abstand kann benutzt werden, wenn lediglich die Länge zweier Vektoren verglichen wird. Argumentationen, die verwenden, dass ein Umweg länger ist als die direkte Verbindung, sind jedoch nicht damit möglich. Im betrachteten Algorithmus kann an allen Stellen der quadratische Abstand verwendet werden, denn die Dreiecksungleichung wird nicht benutzt. Das ziehen einer Wurzel ist somit nur ganz am Ende nötig, um den exakten Abstand auszugeben.

Sind zwei allgemeine Polyeder im Raum gegeben, so hat der Algorithmus ein paar Stellen, an

denen er nicht sinnvoll arbeitet.

Zunächst muss ein Polyeder auf den Einheitsraum $X = [-1, 1]^3$ transformiert werden, damit die Nahe-Mengen-Liste berechnet werden kann. Eine Diskretisierung des Voronoi-Diagramms auf ganz \mathbb{R}^3 ist nicht möglich, denn es müssten unendlich viele Würfel verwendet werden. Selbst wenn man die Würfelgröße nach außen hin wachsen lässt bleibt dieses Problem bestehen. Wie bereits in der Laufzeitanalyse 4.5 erwähnt, kann es vorkommen, dass sich Würfel und Dreiecke von Polyeder A garnicht mit Würfeln und Dreiecken von Polyeder B schneiden. Denn die Polyeder können ihre Lage im Raum verändern. Dies führt dann dazu, dass im zweiten Teil kein Abstand berechnet wird. Die Polyeder müssen also nahe genug beieinander liegen und das Würfelgitter muss entsprechend großzügig um die Polyeder gelegt werden. In der Umkehrung ist es natürlich von Vorteil, wenn sehr wenige Dreiecke und Würfel sich schneiden, sodass im zweiten Teil möglichst wenige Berechnungen durchgeführt werden müssen.

Selbst wenn die Polyeder nahe genug beieinander liegen und ein großes Würfelgitter verwendet wurde, kann es passieren, dass die Polyeder sehr entartet sind. Auch das Zerschneiden großer Dreiecke oder die Erhöhung der Würfelzahl helfen hier nicht weiter, wenn sehr viele Dreiecke auf engstem Raum nahe beieinander liegen. Dann tauchen in den Nahe-Mengen-Listen von Würfeln, die an Dreieckshäufungen liegen, sehr viele Dreiecke auf, sodass im zweiten Teil sehr viele Berechnungen vorzunehmen sind.

Ein weiterer Nachteil ist der erste Teil des Algorithmus. Er ist zwar nur einmal durchzuführen, doch auch hier ist eine sehr große Laufzeit nicht unbedingt erwünscht.

5.3 Erweiterungen und Verbesserungen

Um den ersten Teil in der Praxis zu beschleunigen, kann man die Grafikkarte zu Hilfe nehmen. Mit ihrer Hardware können Voronoi-Diagramme sehr schnell und einfach gezeichnet werden. In [2] wurde diese Erweiterung implementiert und getestet. Die Resultate zeigen, dass die Laufzeit enorm reduziert werden konnte.

Bei entarteten Polyedern ist eine andere Würfelstruktur sinnvoll. Es wird im Algorithmus nirgends gefordert, dass alle Würfel gleich groß sein müssen. Theoretisch wären sogar andere geometrische Objekte wie Kugeln möglich, wenn sie den ganzen Raum überdecken. Durch die ungleichmäßige Verteilung von Würfeln kann man in Bereichen, in denen sehr viele Dreiecke liegen, verfeinern, sodass die dort befindlichen Würfel auch möglichst wenige Dreiecke in die Nahe-Mengen-Liste aufnehmen müssen.

Parallelisierung: Der erste Teil des Algorithmus ist in seiner ursprünglichen Form auf naive Weise ganz leicht parallelisierbar. Denn es werden Schleifen durchlaufen, deren Berechnung unabhängig von einander erfolgen kann. Im zweiten Teil ist auch eine Parallelisierung möglich. Zunächst wird hier eine Schleife über alle Dreiecke des ersten Polyeders durchlaufen, die wie im ersten Teil leicht zu parallelisieren ist, da unabhängig von einander gerechnet wird. Später werden Dreieckspaare nacheinander auf Abstand geprüft werden. Dabei liegt eine Liste von Dreieckspaaren vor, die nach minimal möglichem Abstand sortiert sind. Wurde beim Durchlauf der Schleife der minimal mögliche Abstand des nachfolgenden Dreieckspaares bereits unterschritten, so kann die Berechnung abgebrochen werden. Teilt man die geordnete Liste nicht in der Mitte auf, sondern verteilt die Elemente abwechselnd, so können die parallel laufenden Prozesse für sich ihre Liste abarbeiten. Erreicht ein Prozess, dass Abbruchkriterium, so teilt er den ermittelten Abstand den anderen Prozessen mit. Diese binden diesen in ihr Abbruchkriterium mit ein. Dies geschieht so lange bis kein Prozess mehr läuft.

Danksagung

Für die erfolgreiche Vermittlung von Grundkenntnissen im Fach Mathematik möchte ich an dieser Stelle meinen Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern aus der Schulzeit danken. Besonders erwähnenswert sind dabei J. Martin, W. Straub und K. Winkler.

Literatur- und Abbildungsverzeichnis

- 1 K. Kawachi und H. Suzuki (Department of Precision Machinery Engineering, The University of Tokyo, Japan); Distance Computation between Non-convex Polyhedra at Short Range Based on Discrete Voronoi Regions, 2000
- 2 O. Forster; Analysis 2 (Differentialrechnung im \mathbb{R}^n , gewöhnliche Differentialgleichungen), 2006
- 3 S. Gottschalk; Collision queries using oriented bounding boxes, 2000
 - S. 5, Abbildung 1: Figure 4 aus [2]
 - S. 6, Abbildung 2
 - S. 10, Abbildung 3: (linker Teil) Figure 1 und Figure 3 aus [2]
 - S. 12, Abbildung 4
 - S. 13, Abbildung 5
 - S. 14, Abbildung 6
 - S. 16, Abbildung 7
 - S. 20, Abbildung 8: (linker Teil) en.wikipedia.org Eintrag Separating axis theorem
 - S. 21, Abbildung 9

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel und Quellen als die im Literatur- und Abbildungsverzeichnis angegebenen benutzt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder dem Sinn nach aus veröffentlichten Quellen stammen, sind als solche kenntlich gemacht worden. Alle Abbildungen sind von mir erstellt oder mit einem entsprechenden Hinweis versehen worden. Ich versichere auch, dass diese Arbeit weder vollständig noch auszugsweise und auch nicht in ähnlicher Form für eine andere Prüfung verwendet wurde.

Martin Unold
Mainz, 27.11.2008